9. *Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung nach dem Relativitätsprinzip;* *von M. Laue.*[1])

Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung wurde auf Grund der Elektronentheorie schon vor einer Reihe von Jahren von Heaviside[2]) und besonders ausführlich von Abraham[3]) behandelt. Die Relativitätstheorie hat schon Lorentz[4]) zur Ermittelung des Feldes eines schwingenden Dipols verwandt, ohne jedoch die ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße, sowie die Rückwirkung der Strahlung auf den Dipol anzugeben. Nun stimmen beide Theorien in den elektromagnetischen Grundgleichungen, sowie im Ausdruck für die ponderomotorische Kraft überein. Der Unterschied liegt allein in der Form, die sie den bewegten Ladungen zuschreiben; denn die eine nimmt diese als durch die Bewegung nicht beeinflußt an, während sie sich nach der anderen in Richtung der Geschwindigkeit kontrahieren. Aber dieser Unterschied kann in Entfernungen, die gegen die Dimensionen des mit Ladung erfüllten Raumteiles groß genug sind, nicht mehr in Frage kommen, beide Theorien müssen hier dasselbe elektromagnetische Feld, daher dieselbe ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße, deswegen wiederum dieselbe auf das Elektron wirkende Kraft ergeben. Wenn wir dennoch die Frage hier neu behandeln, so geschieht es, um zu zeigen, wie viel einfacher die Relativitätstheorie sie löst. Außerdem besteht freilich zwischen beiden Theorien ein gewichtiger, die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie auf das deutlichste veranschaulichender Unterschied hinsichtlich der Wirkung dieser Kraft.

1) Aus den Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **10.** p. 888. 1908. *Zusatz bei der Korrektur:* Den Inhalt des Abschnittes a) hat unabhängig davon inzwischen auch M. Abraham in der zweiten Auflage seines Lehrbuches veröffentlicht.

2) O. Heaviside, Nature **67.** p. 6. 1902.

3) M. Abraham, Ann. d. Phys. **14.** p. 236. 1904. Theorie der Elektrizität II, Leipzig 1905, besonders §§ 13—15.

4) H. A. Lorentz, Proc. Amsterdam 1904. p. 803.

a) Die Rückwirkung der Wellenstrahlung auf die Punktladung.

Lorentz hat als Näherung für die Kraft $\mathfrak{K}$, welche das Elektron infolge der Strahlung erfährt, die Gleichung

$$\mathfrak{K} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathfrak{q}}$$

angegeben.[1]) Dabei ist e die Ladung, c die Lichtgeschwindigkeit und $\ddot{\mathfrak{q}}$ der zweite Differentialquotient der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ nach der Zeit. Bei der Ableitung sind alle Glieder, welche in $\mathfrak{q}$, $\dot{\mathfrak{q}}$, $\ddot{\mathfrak{q}}$ usw. quadratisch oder von noch höherer Ordnung sind, vernachlässigt, doch überzeugt man sich leicht, daß kein von den Dimensionen unabhängiges Glied außer dem angegebenen auftreten kann, das nicht $\mathfrak{q}$ als Faktor enthielt. Für $\mathfrak{q} = 0$ und Punktladungen gilt demnach diese Gleichung *streng*, wie groß auch $\dot{\mathfrak{q}}$, $\ddot{\mathfrak{q}}$ usw. sein mögen.

Wir führen nun wie üblich zwei rechtwinklige, in den Achsenrichtungen übereinstimmende, parallel der x-Achse gleichförmig mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegte Koordinatensysteme ein, das gestrichene (x', y', z', dazu die Zeit t') und das ungestrichene (x, y, z, t). Es läßt sich stets so einrichten, daß in dem Augenblick, den wir herausgreifen, das Elektron im gestrichenen System die Geschwindigkeit 0 hat. Es erfährt dann die Kraft

$$\mathfrak{K}' = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathfrak{q}}',$$

die wir auf das ungestrichene System transformieren wollen.

Bei Einstein[2]) sind die Transformationsformeln für die Geschwindigkeit angegeben (die z-Koordinate ist der y-Koordinate gleichberechtigt):

$$\mathfrak{q}_x' = (\mathfrak{q}_x - v)\cdot\frac{c^2}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}, \qquad \mathfrak{q}_y' = \mathfrak{q}_y\,\frac{c\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach t' bzw. t unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}{c\sqrt{c^2 - v^2}}\ ^{3})$$

1) H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch. V. **1.** p. 188. 1903.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17.** p. 891. 1905, § 5 und Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **4.** p. 411. Gleichung (3). 1907.

3) Vgl. M. Planck, Ann. d. Phys. **26.** p. 1. 1908. Gleichung (13) und (14).

$$\dot{\mathfrak{q}}_x' = \left(\frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}\right)^3 \dot{\mathfrak{q}}_x, \qquad \mathfrak{q}_y' = \left(\frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}\right)^2 \left(\dot{\mathfrak{q}}_y + \frac{v\,\mathfrak{q}_y\,\dot{\mathfrak{q}}_x}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}\right),$$

$$\ddot{\mathfrak{q}}_x' = \left(\frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}\right)^4 \left(\ddot{\mathfrak{q}}_x + \frac{3\,v\,\dot{\mathfrak{q}}_x^2}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}\right),$$

$$\ddot{\mathfrak{q}}_y' = \left(\frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x}\right)^3 \left(\ddot{\mathfrak{q}}_y + v\,\frac{3\,\dot{\mathfrak{q}}_y\,\dot{\mathfrak{q}}_x + \mathfrak{q}_y\,\ddot{\mathfrak{q}}_q}{c^2 - v\,\mathfrak{q}_x} + \frac{3\,v^2\,\mathfrak{q}_y\,\dot{\mathfrak{q}}_x^2}{(c^2 - v\,\mathfrak{q}_x)^2}\right).$$

Im vorliegenden Fall, wo $\mathfrak{q}' = 0$ ist, ist $\mathfrak{q}_x = v$, $\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z = 0$. Nimmt man dazu, daß unter derselben Voraussetzung

$$\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_x', \quad \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ ^{1)}$$

ist, so findet man:

$$\mathfrak{K}_x = \frac{2\,e^2\,c}{3\,(c^2 - \mathfrak{q}^2)^2}\left(\ddot{\mathfrak{q}}_x + \frac{3\,|\mathfrak{q}|}{c^2 - \mathfrak{q}^2}\,\dot{\mathfrak{q}}_x^2\right),$$

$$\mathfrak{K}_y = \frac{2\,e^2}{3\,c\,(c^2 - \mathfrak{q}^2)}\left(\ddot{\mathfrak{q}}_y + \frac{3\,|\mathfrak{q}|}{c^2 - \mathfrak{q}^2}\,\dot{\mathfrak{q}}_y\,\dot{\mathfrak{q}}_x\right),$$

$$\mathfrak{K}_z = \frac{2\,e^2}{3\,c\,(c^2 - \mathfrak{q}^2)}\left(\ddot{\mathfrak{q}}_z + \frac{3\,|\mathfrak{q}|}{c^2 - \mathfrak{q}^2}\,\dot{\mathfrak{q}}_z\,\dot{\mathfrak{q}}_x\right).$$

Man kann das Ergebnis in die Vektorgleichung umschreiben:

$$\mathfrak{K} = \frac{2\,e^2}{3\,c\,(c^2 - \mathfrak{q}^2)}\left[\ddot{\mathfrak{q}} + \dot{\mathfrak{q}}\,\frac{3\,(\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})}{c^2 - \mathfrak{q}^2} + \frac{\mathfrak{q}}{c^2 - \mathfrak{q}^2}\left((\mathfrak{q}\,\ddot{\mathfrak{q}}) + \frac{3\,(\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})^2}{c^2 - \mathfrak{q}_z}\right)\right],$$

es stimmt mit Abrahams Resultat[2]) genau überein.

Quasistationär ist die Bewegung eines Elektrons, solange diese Kraft zu vernachlässigen ist gegen die zur Beschleunigung proportionale Trägheitswirkung seines Feldes. Da diese in beiden Theorien der Größenordnung nach dieselbe ist, solange die Geschwindigkeit der des Lichtes nicht allzunahe kommt, stimmen auch die Grenzen der quasistationären Bewegung in ihnen überein.

b) Die Strahlung eines gleichförmig bewegten Dipols.

Das einfachste Modell einer Lichtquelle ist ein molekularer, aus zwei gleich, aber entgegengesetzt geladenen Ionen bestehender, im Vakuum befindlicher Dipol von schnell wechselndem Moment. Wir setzen voraus, daß seine Dimensionen klein gegen die Wellenlänge der ausgesandten Strahlung sind, oder bei nichtperiodischen Vorgängen klein gegen die Wellenlängen

1) M. Planck, l. c. Gleichung (21); A. Einstein, l. c. Gleichung (21).
2) Vgl. Abrahams Lehrbuch, Gleichung (85).

aller derjenigen Schwingungen, welche bei der Fourierschen Zerlegung der Strahlung in Betracht kommen. Der Einfachheit halber nehmen wir noch an, daß sich nur das eine Ion an den Schwingungen beteiligt. Die Verallgemeinerung ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, daß gleiche Verschiebungen der beiden Ladungen im entgegengesetzten Sinne gleichwertig sind.

Auf diesen Dipol wollen wir einige der Gleichungen anwenden, welche Planck[1]) für die Dynamik bewegter Körper entwickelt hat. Dabei ist aber zu bedenken, daß molekulare Gebilde weder Temperatur noch Volumen im Sinne der Thermodynamik, daß nämlich Volumenzunahme Arbeitsabgabe nach außen bedingt, besitzen, daß ihr kinetisches Potential H also von diesen Veränderlichen nicht abhängt. Die Folge ist, daß man dort überall den Druck

$$p = \frac{\partial H}{\partial V}$$

und die Entropie

$$S = \frac{\partial H}{\partial T}\ ^{2)}$$

Null zu setzen hat.

Dieser Dipol soll nun im gestrichenen System ruhen. Nach Formel (33) der genannten Abhandlung ist dann, da die Bewegungsgröße im gestrichenen System, $\mathfrak{G}'$, verschwindet, seine Energie, bezogen aufs ungestrichene System:

$$E = \frac{c\,E'}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie ist daher:

$$-\frac{d\,E}{d\,t} = -\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,\frac{d\,E'}{d\,t'}\,\frac{d\,t'}{d\,t},$$

da aber wegen $\mathfrak{q}_x = v$

$$\frac{d\,t'}{d\,t} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c}$$

ist, folgt

$$-\frac{d\,E}{d\,t} = -\frac{d\,E'}{d\,t'};$$

das pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energiequantum ist in beiden Systemen dasselbe.

1) M. Planck, l. c.
2) Gleichung (7) daselbst.

Bekanntlich berechnet sich nun die Strahlung eines ruhenden Dipols aus der Beschleunigung $\dot{\mathfrak{q}}$ des bewegten Ions nach der Gleichung[1]):

$$-\frac{d\,E'}{d\,t'} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathfrak{q}}'^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{\mathfrak{q}}_x'^2 + \dot{\mathfrak{q}}_y'^2 + \dot{\mathfrak{q}}_z'^2);$$

setzt man in den oben angegebenen Transformationsgleichungen für $\dot{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{q}_x = v$, $\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z = 0$, so folgt hieraus:

$$-\frac{d\,E}{d\,t} = \frac{2\,e^2\,c^3}{3\,(c^2-\mathfrak{q}^2)^2}\left(\frac{\dot{\mathfrak{q}}_x^2}{c^2-\mathfrak{q}^2} + \frac{\dot{\mathfrak{q}}_y^2+\dot{\mathfrak{q}}_z^2}{c^2}\right) = \frac{2\,e^2\,c}{3\,(c^2-\mathfrak{q}^2)^2}\left(\dot{\mathfrak{q}}^2 + \frac{(\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})^2}{c^2-\mathfrak{q}^2}\right),$$

was ebenfalls mit Abrahams Ergebnis[2]) übereinstimmt.

Nach Gleichung (46) der genannten Abhandlung hat die Bewegungsgröße im ungestrichenen System den Wert

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{q}\cdot\frac{E}{c^2}.$$

Ein ruhender Dipol kann nun im Mittel keinen Bewegungsantrieb erfahren, weil zu jeder Richtung die entgegengesetzte gleichberechtigt ist. In dem betrachteten Fall ruht der Dipol im gestrichenen System. Eine etwaige Beschleunigung wäre ein Zeichen für absolute Bewegung dieses Systems, widerspräche also dem Relativitätsprinzip. Es muß daher seine Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ zum ungestrichenen konstant bleiben. Er verliert demnach durch Ausstrahlung pro Zeiteinheit die Bewegungsgröße

$$-\frac{d\,\mathfrak{G}}{d\,t} = -\,\mathfrak{q}\cdot\frac{1}{c^2}\frac{d\,E}{d\,t} = \mathfrak{q}\,\frac{2\,e^2}{3\,c\,(c^2-\mathfrak{q}^2)^2}\left(\dot{\mathfrak{q}}^2 + \frac{(\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})^2}{c^2-\mathfrak{q}^2}\right).$$

Auch dies Ergebnis leitet die ältere Theorie ab[3]) und schließt, daß der Dipol eine Kraft $\mathfrak{K}$ erfährt, die der Bewegung entgegen gerichtet ist. Die Relativitätstheorie muß diesem Schluß zustimmen. Denn auch in ihr gilt der Impulssatz:

$$\mathfrak{K} = \frac{d\,\mathfrak{G}}{d\,t}.$$

Aber während der Impuls $\mathfrak{G}$ in der älteren Theorie Funktion der Geschwindigkeit allein ist und jede Kraft die letztere ändern muß, ist es in der Relativitätstheorie möglich, daß

1) Vgl. Abrahams Lehrbuch, Gleichung (55) oder M. Planck, Ann. d. Phys. 9. p. 619. 1902.
2) l. c., Gleichung (82b).
3) l. c., Gleichung (83).

eine Kraft statt dessen die Energie und die mit ihr verbundene Trägheit ändert. Dieser Fall tritt bei der bewegten Lichtquelle ein. Die ältere Theorie braucht ferner zur Aufrechterhaltung der gleichförmigen Bewegung eine Kraft, deren Arbeit einen Teil der Energiestrahlung deckt. Nach der Relativitätstheorie stammt diese dagegen ganz aus der Energie der Lichtquelle.

Die angegebenen Werte für die Energie- und Impulsstrahlung gelten, da sie nur von der Beschleunigung des bewegten Elektrons abhängen, auch dann, wenn dies nicht im Verbande eines Dipols schwingt, sondern sich sonst in irgend einer Weise bewegt. Daß die unter a) berechnete Kraft $\mathfrak{K}$ dieselben Werte für die Energie- und Impulsstrahlung liefert, wenn man die Mittelwerte

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}(\mathfrak{K}\,\mathfrak{q})\,d\,t \quad \text{und} \quad \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}\mathfrak{K}\,d\,t$$

bildet, ist schon bei Abraham bewiesen. Man kann daher die letzteren Formeln auch ohne Benutzung der Planckschen Abhandlung sehr einfach aus der Relativitätstheorie ableiten.

c) Die Kraftwirkung auf andere Strahlungsquellen.

Des Zusammenhanges wegen sei darauf hingewiesen, daß auch Strahlungsquellen von beliebig großer Ausdehnung bei der Bewegung eine ähnliche, die Geschwindigkeit nicht ändernde Kraft erfahren. Im Gegensatz zum einfachen Dipol freilich erleiden solche schon im Ruhezustand von ihrer Strahlung im allgemeinen Bewegungsantriebe; man denke etwa an einen von Strahlung im Temperaturgleichgewicht erfüllten Hohlraum, der nur eine einzige kleine Öffnung hat; er erfährt parallel zur Normale dieser eine Kraft. Ruht nun eine Strahlungsquelle im gestrichenen System und ist die hier auf sie wirkende Kraft $\mathfrak{K}'$, so hat die Kraft $\mathfrak{K}$ im ungestrichenen System nach Formel (32) und (22) der Planckschen Abhandlung die Komponenten

$$\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_x' + \frac{|\mathfrak{q}|}{c^2}\left(T\frac{d\,S}{d\,t} + V\frac{d\,p}{d\,t}\right),$$

$$\mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}_y'\sqrt{1-\frac{\mathfrak{q}^2}{c^2}}, \quad \mathfrak{K}_z = \mathfrak{K}_z'\sqrt{1-\frac{\mathfrak{q}^2}{c^2}}$$

(T bedeutet die Temperatur, S die Entropie, V das Volumen, p den Druck). Die pro Zeiteinheit angestellte Wärmemenge ist dabei

$$W = - T \frac{dS}{dt}.$$

Außer der Kraft, welche die Lichtquelle im Ruhezustand erfährt und deren transversale Komponenten bei der Bewegung den Faktor $\sqrt{1 - \mathfrak{q}^2/c^2}$ erhalten, tritt also noch die Zusatzkraft

$$- \frac{\mathfrak{q}}{c^2} \left(W - V \frac{dp}{dt} \right)$$

auf. Lorentz findet für sie den Wert

$$- \frac{\mathfrak{q}}{c^2} W,$$

freilich nur für relativ geringe Geschwindigkeiten $\mathfrak{q}$.[1]) Aber nach ihm hemmt diese die Bewegung; nach der Relativitätstheorie ist dagegen die Änderung des Absolutwertes der Bewegungsgröße[2])

$$\frac{d|\mathfrak{G}|}{dt} = \frac{d|\mathfrak{q}|}{dt} \cdot \frac{E + pV}{c^2} + \frac{|\mathfrak{q}|}{c^2} \frac{d}{dt}(E + pV);$$

oder da nach dem Energieprinzip

$$W = - \left(\frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} \right)$$

ist,

$$\frac{d|\mathfrak{G}|}{dt} = \frac{d|\mathfrak{q}|}{dt} \cdot \frac{E + pV}{c^2} - \frac{|\mathfrak{q}|}{c^2} \left(W - V \frac{dp}{dt} \right).$$

Die Zusatzkraft ändert daher, wie schon angegeben, nicht die Geschwindigkeit, sondern die Trägheit.

Berlin, Dezember 1908.

---

1) H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wiss. 5. 1. p. 270. 1903.
2) M. Planck, l. c. Gleichung (46).

(Eingegangen 21. Dezember 1908.)